Частное учреждение образования

“Колледж бизнеса и права”

УТВЕРЖДАЮ

Зам. директора

по учебной работе \_\_\_\_\_\_\_\_\_И.В. Малафей «\_\_\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_ 2022

МАТЕМАТИКА

Вопросы к экзамену для учащихся второго курса

дневной формы получения образования специальности2-40 01 01

*«*Программное обеспечение информационных технологий*»*

Составлены на основании типовой учебной программы, утвержденной Министерством образования Республики Беларусь 28.11.2014

1. Дать понятие комплексного числа. Определить формы представления комплексного числа, записать соответствующие формулы. Изложить правила

арифметических действий с комплексными числами в алгебраической форме,

записать соответствующие формулы.

**Понятие**. Комплексное число — это выражение вида a + bi, где a, b — действительные числа, а i — так называемая мнимая единица, символ, квадрат которого равен –1, то есть i2 = –1.

Z=a+bi – алгебраическая формула числа

**Формы представления**. Геометрическая (z=x+iy); тригонометрическая (z=|z|∙(cosφ+isinφ), где |z| – это модуль комплексного числа, а φ – аргумент комплексного числа); показательная (формула Эйлера: ).

**Правила**.

Сложение комплексных чисел

**Пример 1**

Сложить два комплексных числа , 

Для того чтобы сложить два комплексных числа нужно сложить их действительные и мнимые части:  


Просто, не правда ли? Действие настолько очевидно, что не нуждается в дополнительных комментариях.

Таким нехитрым способом можно найти сумму любого количества слагаемых: просуммировать действительные части и просуммировать мнимые части.

Для комплексных чисел справедливо правило первого класса:  – от перестановки слагаемых сумма не меняется.

Вычитание комплексных чисел

**Пример 2**

Найти разности комплексных чисел  и , если , 

Действие аналогично сложению, единственная особенность состоит в том, что вычитаемое нужно взять в скобки, а затем – стандартно раскрыть эти скобки со сменой знака:



Результат не должен смущать, у полученного числа две, а не три части. Просто действительная часть – составная: . Для наглядности ответ можно переписать так: .

Рассчитаем вторую разность:  
  
Здесь действительная часть тоже составная: 

Чтобы не было какой-то недосказанности, приведу короткий пример с «нехорошей» мнимой частью: . Вот здесь без скобок уже не обойтись.

Умножение комплексных чисел

Настал момент познакомить вас со знаменитым равенством:



**Пример 3**

Найти произведение комплексных чисел  , 

Очевидно, что произведение следует записать так:  


Что напрашивается? Напрашивается раскрыть скобки по правилу умножения многочленов. Так и нужно сделать! Все алгебраические действия вам знакомы, главное, помнить, что  и быть внимательным.

Повторим, omg, школьное правило умножения многочленов: Чтобы умножить многочлен на многочлен нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена.

Я распишу подробно:  


Надеюсь, всем было понятно, что 

Внимание, и еще раз внимание, чаще всего ошибку допускают в знаках.

Как и сумма, произведение комплексных чисел перестановочно, то есть справедливо равенство: .

В учебной литературе и на просторах Сети легко найти специальную формулу для вычисления произведения комплексных чисел. Если хотите, пользуйтесь, но мне кажется, что подход с умножением многочленов универсальнее и понятнее. Формулу приводить не буду, считаю, что в данном случае – это забивание головы опилками.

Деление комплексных чисел

**Пример 4**

Даны комплексные числа , . Найти частное .

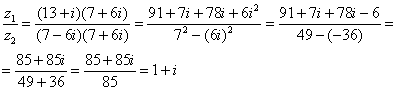
Составим частное:  


Деление чисел осуществляется методом умножения знаменателя и числителя на сопряженное знаменателю выражение.

Вспоминаем бородатую формулу  и смотрим на наш знаменатель: . В знаменателе уже есть , поэтому сопряженным выражением в данном случае является , то есть 

Согласно правилу, знаменатель нужно умножить на , и, чтобы ничего не изменилось, домножить числитель на то же самое число :  


Далее в числителе нужно раскрыть скобки (перемножить два числа по правилу, рассмотренному в предыдущем пункте). А в знаменателе воспользоваться формулой  (помним, что и не путаемся в знаках!!!).

Распишу подробно:  


Пример я подобрал «хороший», если взять два числа «от балды», то в результате деления почти всегда получатся дроби, что-нибудь вроде .

В ряде случаев перед делением дробь целесообразно упростить, например, рассмотрим частное чисел: . Перед делением избавляемся от лишних минусов: в числителе и в знаменателе выносим минусы за скобки и сокращаем эти минусы: . Для любителей порешать приведу правильный ответ: 

Редко, но встречается такое задание:

**Пример 5**

Дано комплексное число . Записать данное число в алгебраической форме (т.е. в форме ).

2. Дать геометрическую интерпретацию комплексного числа и его изображения на комплексной плоскости, его действительной и мнимой части, модуля и аргумента, дать необходимые пояснения. Записать формулы тригонометрического и показательного представления комплексного числа, определить действия над числами в тригонометрической и показательной форме, записать и пояснить соответствующие формулы.

**Интерпретация**. Ось Ox называется ***действительной осью***, а ось Oy – ***мнимой осью***. Таким образом, действительному числу z=x+0i=x отвечает точка на действительной оси, а  ***мнимому***числу  z=0+iy=iy –  точка на мнимой оси.

Можно также изображать комплексное число в виде радиус-вектора {x,y} и определять его, задавая его длину r и угол φ между осью Ox и вектором.

Длина этого вектора называется модулем комплексного числа

|z|=r= >= 0

а угол φ называется ***аргументом комплексного числа*** и обозначается Argz. Аргумент определяется с точностью до слагаемого 2πk(k=0,±1,±2,±3,...) и для положительных значений отсчитывается от оси Oxдо вектора против часовой стрелки, а для отрицательных значений – по часовой стрелке.

Формулы и действия с показательным: (ссылка) [Действия над комплексными числами в показательной форме | matematicus.ru](https://www.matematicus.ru/vysshaya-matematika/kompleksnye-chisla/dejstviya-nad-kompleksnymi-chislami-v-pokazatelnoj-forme).

3. Дать определение матрицы, определить виды матриц. Изложить линейные операции над матрицами и их свойства, записать соответствующие формулы. Дать определение операций транспонирования и умножения матриц. Изложить их свойства, записать соответствующие формулы.

**Определения**. Матрица – называется прямоугольная таблица, состоящая из mn чисел или иных объектов и содержащая m-строк и n-столбцов.

**Транспонирование** — это операция над матрицами в результате которой матрица поворачивается относительно своей главной диагонали. При этом столбцы исходной матрицы становятся строками результирующей.

**Свойства транспонированных матриц**:

~(A^T)^T= A

Дважды транспонированная матрица А равна исходной матрице А.

~(A + B)^T = A^T + B^T

Транспонированная сумма матриц равна сумме транспонированных матриц.

~(AB)^T = B^TA^T

Транспонированное произведение матриц равно произведению транспонированных матриц, взятых в обратном порядке.

~(\lambda A)^T=\lambda A^T

При транспонировании можно выносить скаляр.

~\det A = \det A^T

Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы

**Умножения матриц**. Произведением двух матриц А и В называется матрица С, элемент которой, находящийся на пересечении i-й строки и j-го столбца, равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы А на соответствующие (по порядку) элементы j-го столбца матрицы В.



4. Дать определение определителя квадратной матрицы. Записать формулы для вычисления определителей 2-го и 3-го порядков. Изложить свойства определителей. Сформулировать правило Саррюса для вычисления определителей 3-го порядка.

**Определение**. Определитель (детерминант) квадратной матрицы — это число, которое ставится в соответствие матрице и вычисляется по ее элементам согласно следующим правилам.

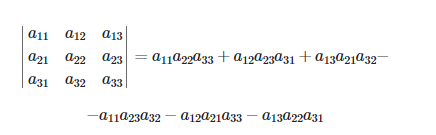
**Свойства**:

1. При транспонировании матрицы определитель не меняется.
2. Если определитель содержит нулевую строку или столбец, то он равен нулю.
3. Если поменять местами две строки или два столбца, определитель изменит знак.
4. Общий множитель строки или столбца можно вынести за знак определителя.

**Формулы**. Для матрицы второго порядка (2×2) значение определителя вычисляется как  
Определитель матрицы 2 порядка

Для матрицы второго порядка (3×3) значение определителя вычисляется как

**Правило треугольника** **(Саррюса)**



5. Изложить способы вычисления определителей n-го порядка: метод понижения порядка определителя, метод приведения матрицы к треугольному виду. Изложить понятия эквивалентности матриц, элементарных преобразований строк матрицы.

**Метод понижения порядка определителя.**

В некоторой строке (или столбце) при помощи свойств определителей делаем все элементы кроме одного равными нулю.

Раскладываем определитель по элементам этой строки (или столбца). В результате чего получаем определитель меньшего порядка.

В случае если порядок полученного определителя больше единицы, то действия №1 и №2 повторяем. В противном случае вычисления заканчиваются.

**Метод приведения матрицы к треугольному виду (Гаусса).** Для приведения матрицы к треугольному виду, необходимо обнулить все элементы стоящие ниже главной диагонали.

**Эквивалентность матрицы** – если размерности матриц совпадают и соответствующие элементы сравниваемых матриц равны между собой. Также эквивалентными называются матрицы, к которым пришли через эквивалентные преобразования.

**Элементарными преобразованиями над строками**:

умножение строки на ненулевое число;

перестановка двух строк;

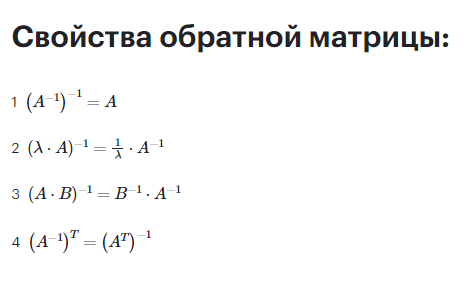
прибавление к одной строке матрицы другой ее строки, умноженной на некоторое ненулевое число.

6. Определить понятие обратной матрицы и условие ее существования. Изложить ее свойства. Изложить алгоритм вычисления обратной матрицы.

**Обратная матрица**. Невырожденной называется квадратная матрица, определитель которой не равен нулю. Квадратная матрица называется вырожденной, если ее определитель равен нулю.

Квадратная матрица  называется обратной к невырожденной матрице A ,

если , где E - это единичная матрица соответствующего порядка (элементы главной диагонали равны 1).



Методы вычисления:

1. методом алгебраических дополнений, при котором, как было замечено в начале урока, требуется находить определители, миноры и алгебраические дополнения и транспонировать матрицы;

**Алгоритм нахождения обратной матрицы методом алгебраических дополнений**

1. Найти определитель данной матрицы A. Если определитель равен нулю, нахождение обратной матрицы прекращается, так как матрица вырожденная и обратная для неё не существует.

2. Найти матрицу, транспонированную относительно A.

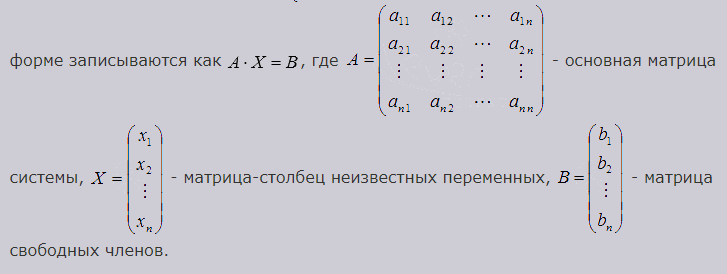
3. Вычислить элементы союзной матрицы как алгебраические дополнения марицы, найденной на шаге 2.

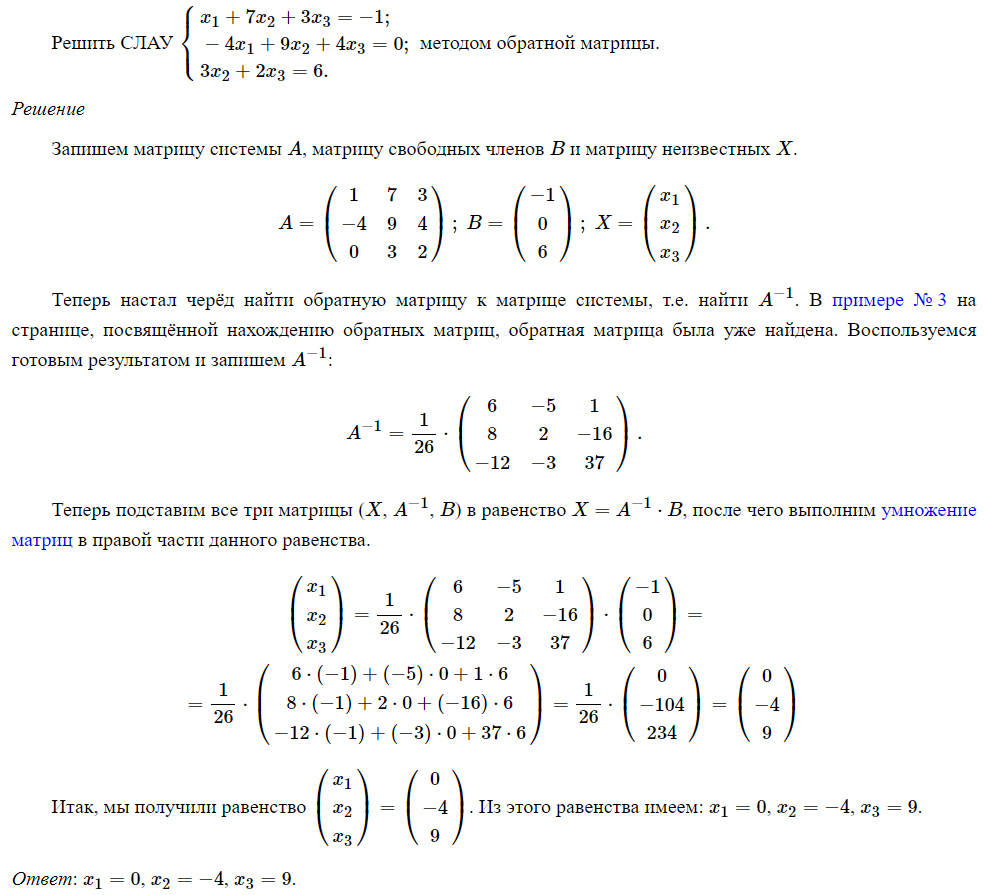
4. Применить формулу (2): умножить число, обратное определителю матрицы A, на союзную матрицу, найденную на шаге 4.

5. Проверить полученный на шаге 4 результат, умножив данную матрицу A на обратную матрицу. Если произведение этих матриц равно единичной матрицы, значит обратная матрица была найдена верно. В противном случае начать процесс решения снова.

1. методом исключения неизвестных Гаусса, при котором требуется производить элементарные преобразования матриц (складывать строки, умножать строки на одно и то же число и т. д.).

7. Записать систему линейных алгебраических уравнений в матричном виде. Изложить сущность решения систем линейных алгебраических уравнений методом обратной матрицы.





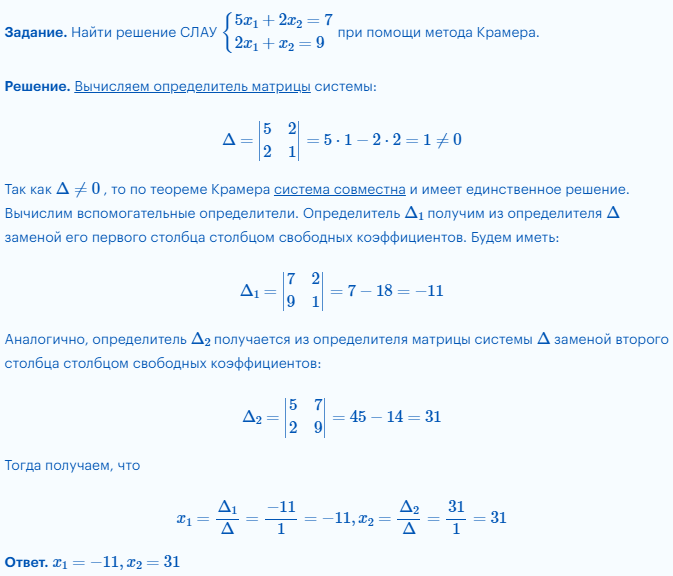
8. Определить понятие системы линейных алгебраических уравнений с n неизвестными, ее решения, совместности, определенности, несовместности, неопределенности, эквивалентности, эквивалентных преобразований. Сформулировать критерий совместности системы.

????????????????????????????????

9. Сформулировать теорему Крамера. Записать формулы Крамера. Раскрыть сущность решения систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера.

**Теорема Крамера**. Если определитель матрицы квадратной системы не равен нулю, то система совместна и имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

где Δ - определитель матрицы системы,  - определитель матрицы системы, где вместо i-го столбца стоит столбец правых частей.



10. Изложить алгоритм метода Гаусса, раскрыть его сущность и виды решений в зависимости от полученной ступенчатой матрицы. Определить понятие базисных и свободных неизвестных, общего и частного решения для систем с бесконечным множеством решений.

?????????????????????????????????????????

11. Дать понятие вектора на плоскости и в пространстве, определить линейные операции над векторами в геометрической форме, изложить их свойства, записать соответствующие формулы. Дать определение коллинеарности и компланарности векторов.

**Вектор** – это направленный отрезок прямой. Исходя из определения, под вектором в геометрии отрезок на плоскости или в пространстве, который имеет направление, и это направление **задается началом и концом**.

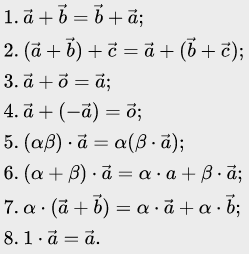
**Линейные операции.**

1. Сложение вектора;

2. Вычитание вектора;

3. Умножение вектора на число.

**Свойства**.



**Коллинеарность и компланарность**.

Два вектора называют **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Три и более векторов называют **компланарными** если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

12. Изложить понятие прямоугольной декартовой системы координат. Определить понятия проекции точки и вектора, координат вектора в данном базисе. Сформулировать свойства проекций, записать соответствующие формулы.

?????????????????????

13. Определить линейные операции над векторами в прямоугольных декартовых координатах и записать соответствующие формулы. Записать формулы для вычисления координат и длины вектора. Дать определение скалярного произведения векторов, изложить его свойства, записать формулу для вычисления в координатной форме. Изложить механический смысл скалярного произведения.

?????????????????????

14. Дать определение векторного произведения векторов: изложить его свойства, геометрический смысл, вычисление в координатной форме. Дать определение смешанного произведения векторов, изложить его свойства, геометрический смысл, вычисление в координатной форме.

?????????????????????

15. Определить способы задания прямой на плоскости. Пояснить задание прямой точкой и направлением. Вывести каноническое и параметрическое уравнения прямой, уравнение прямой по двум точкам. Пояснить задание прямой на плоскости точкой и перпендикулярным вектором. Вывести общее уравнение прямой. Записать неполные уравнения прямой, дать необходимые пояснения. Вывести уравнение прямой в отрезках, дать необходимые пояснения. Вывести уравнение прямой с угловым коэффициентом, дать необходимые пояснения.

?????????????????????

16. Разъяснить критерии определения взаимного расположения прямых на плоскости в зависимости от видов уравнений прямых. Записать условия параллельности и перпендикулярности прямых. Дать определение угла между двумя прямыми и расстояния от точки до прямой. Записать формулы для определения угла между двумя прямыми и расстояния от точки до прямой на плоскости.

?????????????????????

17. Дать определение линии n-го порядка. Записать общее уравнение кривых 2-го порядка, пятичленное уравнение кривых 2-го порядка. Изложить виды кривых, определяемых данным уравнением, в зависимости от его коэффициентов.

?????????????????????

18. Дать определение окружности, записать ее геометрическое, каноническое, алгебраическое уравнения, изложить геометрические свойства.

**Окружность** – это замкнутая кривая на плоскости, состоящая из точек, равноудаленных от определенной точки. Данная точка называется центром окружности.

**Уравнения**.

( *х* – *х*0) 2+ ( *у* – *у*0) 2 = *R*2;

*х* 2+y 2*=R* 2;

( *х* – a) 2+ ( *у* – b) 2 = *R*2;

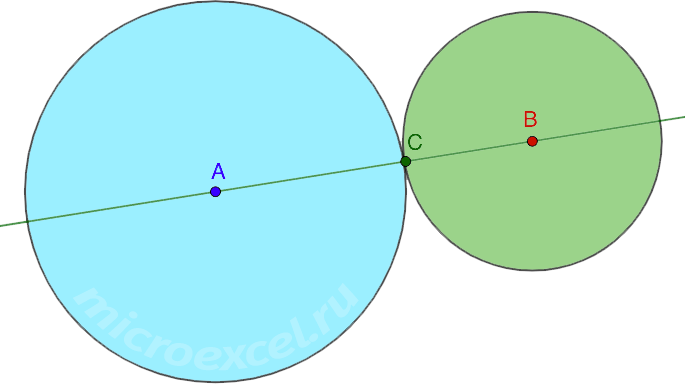
**Свойства окружности**

**Свойство 1**

Через три точки на плоскости, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность, причем только одну.

**Свойство 2**

Точка касания двух окружностей (C) лежит на одной прямой (AB), которая проходит через их центры.



**Свойство 3**

Изопериметрическое неравенство: Из всех замкнутых кривых одинаковой длины окружность ограничивает область с самой большой площадью.

19. Дать определение эллипса, его основных параметров, записать его геометрическое, каноническое и алгебраическое уравнения, изложить геометрические свойства. Записать формулы для и определить взаимосвязь осей и фокусного расстояния.

**Эллипсом** называется множество точек в плоскости для каждой из которых сумма расстояний до двух заданных точек постоянно и больше расстояния между этими точками.

**Геометрическое уравнение** –

**Формулы эксцентриситета** – или

**Фокусное расстояние и полуоси связаны соотношением**:

???????????????

20. Дать определение гиперболы, ее основных параметров. Записать ее геометрическое, канонические и алгебраическое уравнения, изложить геометрические свойства. Записать формулы для вычисления эксцентриситета, уравнения асимптот и определить взаимосвязь длин осей и фокусного расстояния.

**Гиперболой** называется множество точек плоскости для каждой из которых модуль разности расстояний до двух заданных точек плоскости постоянен и меньше расстояния между этими точками.

?????????????

21. Дать определение параболы, записать ее геометрическое и различные виды канонических уравнений, изложить геометрические свойства. Записать различные координаты фокуса и уравнения директрисы параболы в зависимости от расположения параболы на координатной плоскости.

?????????????

22. Изложить способы задания плоскости в пространстве. Вывести уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору. Записать общее уравнение плоскости и получить уравнение плоскости в отрезках.

**Способы**:

1. тремя точками, не лежащими на одной прямой линии
2. прямой линией и точкой, не принадлежащей этой прямой
3. двумя пересекающимися прямыми
4. двумя параллельными прямыми

**Уравнение плоскости:** *A*(*x* − *x*0) + *B*(*y* − *y*0) + *C*(*z* − *z*0) = 0

**В отрезках:** формула

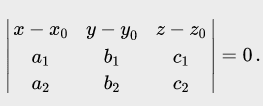
23. Вывести общее уравнение плоскости в пространстве. Записать неполные уравнения плоскостей в пространстве, дать необходимые пояснения. Вывести уравнение плоскости по трем точкам и по точке и двум неколлинеарным векторам, дать необходимые пояснения.

**Общее**: формула

**Неполные уравнения**.

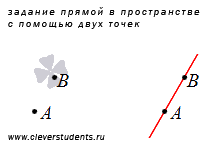
1. D=0 **Ax+Ву+Сz=0**– плоскость, **проходящая через начало координат.**
2. А=0 **Ву+Сz+D=0**– уравнениеплоскости, **параллельной оси Ох.**(Т.к. нормальный вектор **n={**0;В;С} перпендикулярен оси Ох).
3. В=0 **Ах+Сz+D=0 -**уравнениеплоскости, **параллельной оси Оу.**(Т.к. нормальный вектор **n={**А;0;С} перпендикулярен оси Оy).
4. С=0 **Ах+Ву+D=0 -**уравнениеплоскости, **параллельной оси Оz.**(Т.к. нормальный вектор **n={**А;B;0} перпендикулярен оси Оz).
5. А=В=0 **Сz+D=0 –** **z=-D/C** **–** уравнение плоскости, параллельной плоскости Оху (т.к. эта плоскость параллельна осям Ох и Оу).
6. А=С=0 **Ву+D=0 - у=-D/В-**уравнение плоскости, параллельной плоскости Охz (т.к. эта плоскость параллельна осям Ох и Оz).
7. В=С=0 **Ах+D=0 – x=-D/A-**уравнение плоскости, параллельной плоскости Оуz (т.к. эта плоскость параллельна осям Оу и Оz).
8. **A=D=0** **By+Cz=0 -**уравнение плоскости, проходящей через ось Ох.
9. B=D=0 **Ax+Cz=0 -**уравнение плоскости, проходящей через ось Оy.
10. **A=B=D=0** **Cz=0 (z=0) – координатная плоскость Оху.** (т.к. эта плоскость параллельна Оху и проходит через начало координат).
11. **А=С=D=0** **By=0 (y=0) – координатная плоскость Охz.** (т.к. эта плоскость параллельна Охz и проходит через начало координат).
12. **B=C=D=0** **Ax=0 (x=0)** **– координатная плоскость Оуz.**(т.к. эта плоскость параллельна Оуz и проходит через начало координат).

**Уравнение плоскости по трем точкам**. (М1М· М1М2· М1М3=0)

Условие компланарности векторов  можно записать, используя свойства смешанного произведения  Применяя формулу, получаем уравнение плоскости, проходящей через заданную **точку и компланарной двум неколлинеарным векторам**:

24. Изложить способы задания прямой в пространстве и вывести различные виды уравнений прямой в пространстве. Дать необходимые пояснения.

Если в трехмерном пространстве введена прямоугольная система координат и задана прямая с помощью указания координат двух ее точек, то мы имеем возможность **составить уравнение прямой**, проходящей через две заданные точки.



**Второй способ** задания прямой в пространстве основан на теореме: через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и причем только одна.

[Уравнения прямой в пространстве. (cleverstudents.ru)](http://www.cleverstudents.ru/line_and_plane/forms_of_equations_of_line_in_space.html)

25. Сформулировать и разъяснить критерии взаимного расположения прямых в пространстве и записать различные условия их взаимного расположения. Дать необходимые пояснения.

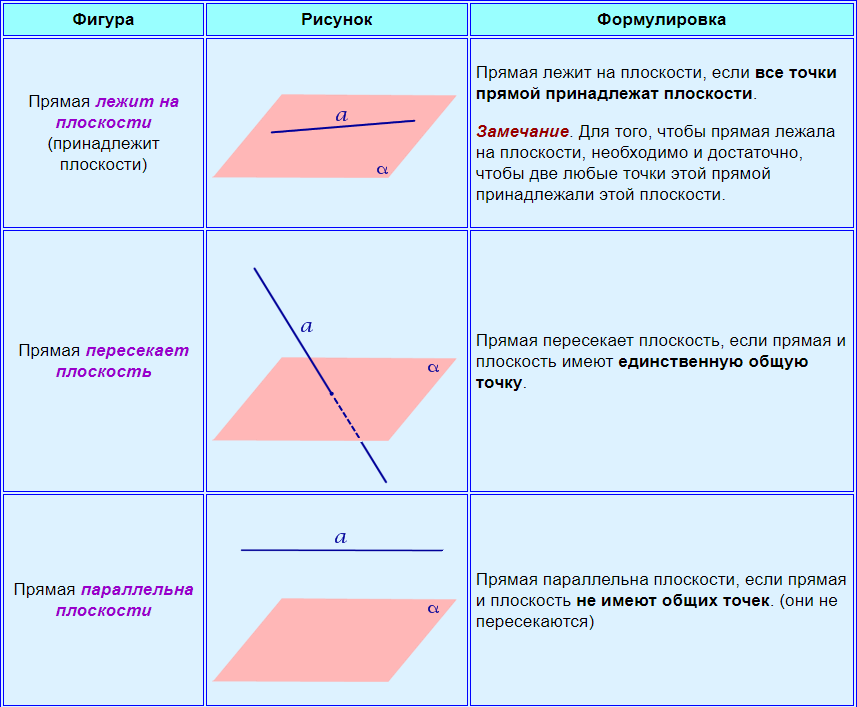
Существует три варианта взаимного расположения двух прямых в пространстве: прямые могут быть пересекающимися, параллельными и скрещивающимися.

**Пересекающиеся** прямые. Две различные прямые называются пересекающимися, если они имеют общую точку. Точка пересечения единственна: если две прямые имеют две общие точки, то они совпадают.

**Параллельные** прямые. Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

**Скрещивающиеся** прямые. Две прямые называются скрещивающимися, если они не параллельны и не пересекаются. Равносильное определение такое: две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.

26. Сформулировать и разъяснить критерии взаимного расположения прямой и плоскости. Дать определение угла между прямой и плоскостью, расстояния от точки до плоскости, записать соответствующие формулы.

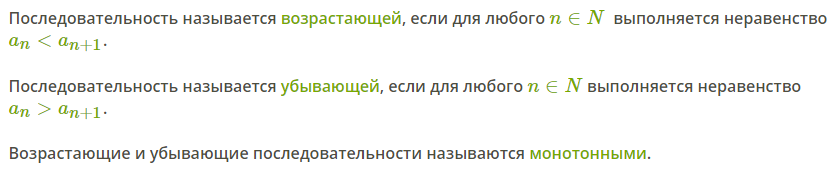


???????????

27. Дать определение числовой последовательности, изложить ее свойства. Перечислить виды последовательностей и способы задания числовой последовательности. Дать определение арифметической прогрессии и изложить ее свойства, записать соответствующие формулы. Дать определение геометрической прогрессии и изложить ее свойства, записать соответствующие формулы.

**Числовой последовательностью** называется упорядоченный набор пронумерованных чисел.

**Свойства.**



**Виды**.

Последовательность может быть **ограниченной** или **неограниченной**, **возрастающей** или **убывающей**.

Последовательность (Xn) называет **ограниченной**, если существуют два числа m и M такие, что для любого n принадлежащего множеству натуральных чисел, будет выполняться равенство m<=Xn

Последовательность (Xn), **не являющаяся ограниченной**, называется неограниченной последовательностью.

Последовательность (Xn) называется **возрастающей**, если для всех натуральных n выполняется следующее равенство X(n+1) > Xn. Другими словами, каждый член последовательности, начиная со второго, должен быть больше предыдущего члена.

Последовательность (Xn) называется **убывающей**, если для всех натуральных n выполняется следующее равенство X(n+1) < Xn. Иначе говоря, каждый член последовательности, начиная со второго, должен быть меньше предыдущего члена.

**Способы задания числовой последовательности**:

1. Аналитический (при помощи формулы)

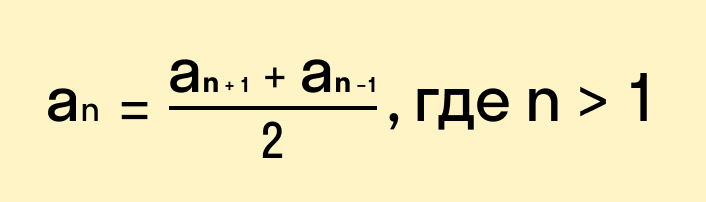
2. Словесный

3. Рекуррентный

**Арифметической прогрессией** называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом.

**Свойство арифметической прогрессии**:

Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов.



**Геометрической прогрессией** называется последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число.

**Свойство геометрической прогресси:**

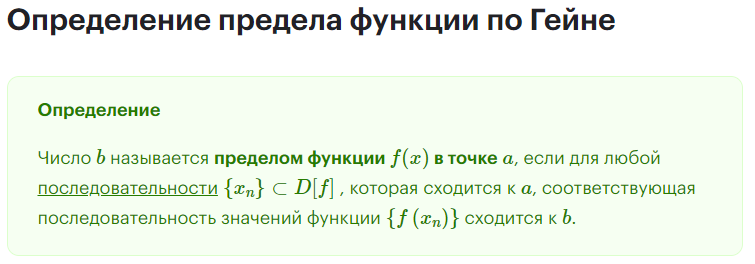
Квадрат любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению последующего и предыдущего ее членов (произведению своих соседей)

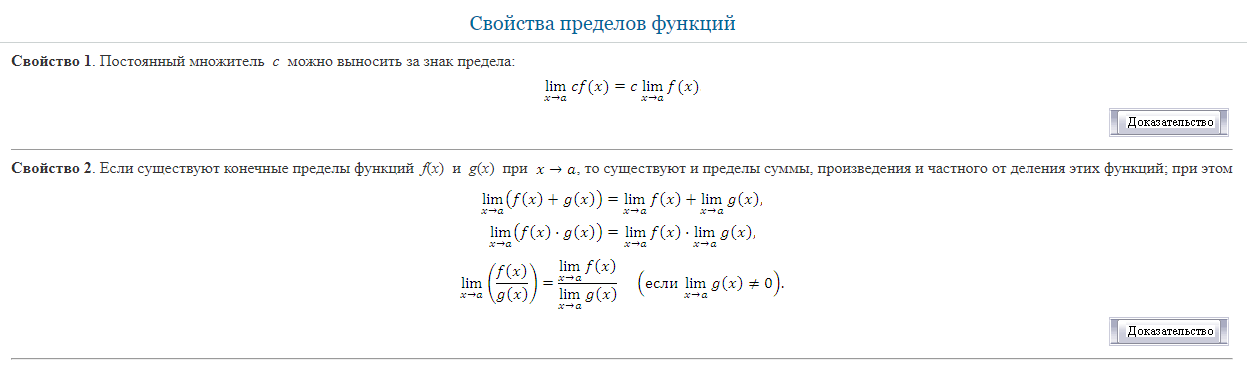


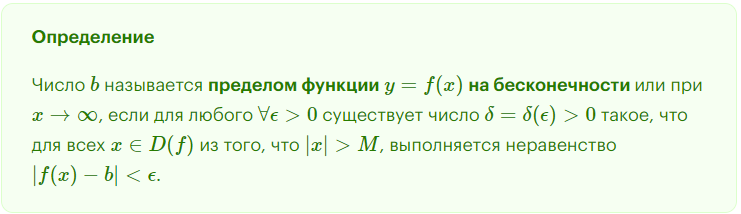
28. Дать понятие предела последовательности. Изложить критерий Коши. Сформулировать теоремы о свойствах предела последовательности. Дать понятие бесконечно больших и бесконечно малых последовательностей, изложить их свойства.

????????????????

29. Дать понятие предела функции в точке. Изложить критерий Гейне. Сформулировать теоремы о свойствах пределов функций. Дать понятие предела функции на бесконечности и односторонних пределов. Раскрыть суть вычисления пределов как раскрытия неопределенностей. Записать формулы замечательных пределов. Определить понятия бесконечно больших и бесконечно малых функций, эквивалентности бесконечно малых функций. Записать формулы эквивалентных бесконечно малых функций.







**Односторонний предел** — предел числовой функции, подразумевающий «приближение» к предельной точке с одной стороны. Такие пределы называют соответственно левым и правым пределами.

Раскрывать неопределенности позволяет:

1. упрощение вида функции (преобразование выражения с использованием формул сокращенного умножения, тригонометрических формул, домножением на сопряженные выражения с последующим сокращением и т.п.);
2. использование замечательных пределов;
3. применение правила Лопиталя;
4. использование замены бесконечно малого выражения ему эквивалентным (использование таблицы эквивалентных бесконечно малых).

**Первый замечательный предел.**

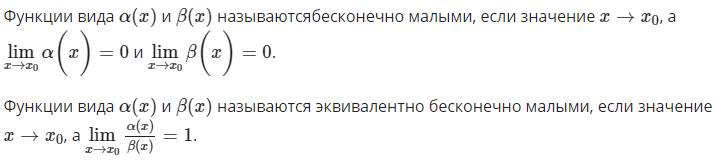


**Второй замечательный предел.**

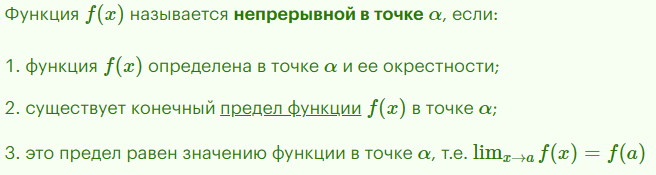


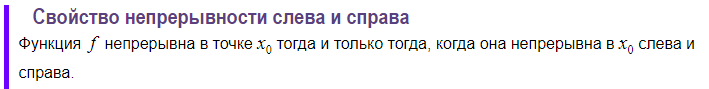
**Определение бесконечно малой функции**  
Функция α(x) называется бесконечно малой при x стремящемся к x0, если функция имеет предел при x → x0, и он равен нулю:  

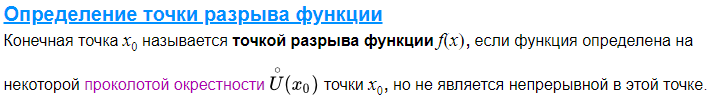

**Определение бесконечно большой функции**  
Функция f(x) называется бесконечно большой при x стремящемся к x0, если функция имеет предел при x → x0, и он равен бесконечности:  

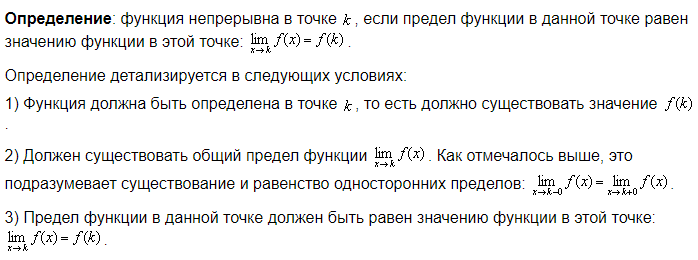



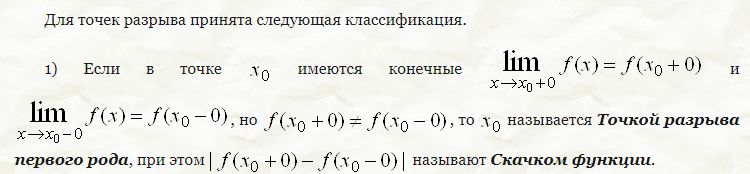
30. Дать определение непрерывности функции в точке. Изложить свойства функций, непрерывных в точке. Дать определение точки разрыва функции. Сформулировать условие непрерывности функции в точке. Изложить классификацию разрывов функции.











31. Дать определение асимптоты графика функции. Назвать виды асимптот, сформулировать условия существования асимптот графика функции, записать соответствующие уравнения асимптот.

**Асимптотой** кривой называется прямая к которой неограниченно приближаются точки графика функции при удалении аргумента от начала координат..

Различают **три вида** асимптот: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

**Вертикальная** 

**Горизонтальная** 

32. Дать определение производной функции, записать соответствующие формулы. Сформулировать основное свойство производной функции. Сформулировать правила дифференцирования и записать соответствующие формулы. Раскрыть механический (физический) и геометрический смысл производной. Записать и разъяснить уравнения касательной и нормали к кривой.

**Производной функции** называется приращение функции к соответствующему приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю. 

**Основное свойство**: если функция дифференцируется в некоторой точке, то она и непрерывна в ней.

**Правила.**

1. Постоянный множитель c можно выносить за знак производной



1. Если существуют производные    и   , то производная от суммы (разности) функций    и    равна сумме (разности) производных



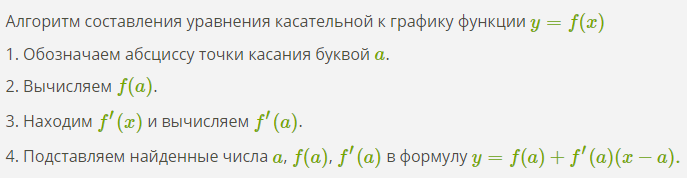
1. Если существуют производные    и   , то выполняются следующие правила дифференцирования произведения функций и частного от их деления





**Механический смысл производной** заключается в том, что средняя скорость при стремлении дельта t к нулю приближается к действительной скорости движения и в пределе даёт мгновенную скорость движения в момент времени t нулевое.

**Геометрический смысл производной** заключается в следующем: если к графику функции у = f(x) в некоторой точке х0 проведена касательная, непараллельная оси у, то значение производной в точке касания есть тангенс угла α, образованного этой касательной с положительным направлением оси абсцисс или угловой коэффициент касательной.



Если существует конечная и отличная от нуля производная , то уравнение нормали к графику функции  в точке  выражается следующим уравнением:  


33. Дать определения сложной и обратной функции. Привести примеры. Сформулировать правила дифференцирования сложной и обратной функций, записать соответствующие формулы, определить условия их применения. Дать определение неявной функции. Сформулировать правила дифференцирования неявно заданной функции. Записать уравнения функции, заданной параметрически. Сформулировать правила о дифференцировании функции, заданной параметрическими уравнениями, записать соответствующие формулы, определить условия их применения.

**Сложная функция** — это функция от функции. Если u — функция от x, то есть u=u(x),  а f — функция от u:  f=f(u), то функция y=f(u) — сложная.

y=sin (x+1). Эта функция — сложная. Внутренняя функция u здесь равна x+1, а внешняя функция f — это синус. То есть u=x+1, f=sin u.

Область определения функции y=f(x) является областью значений обратной к ней функции, а область значений y=f(x) — областью определения **обратной функции**.

Найти функцию, обратную функции y=2x-6.

1) x=2y-6

2) -2y=-x-6

y=0,5x+3.

Функции y=2x-6 и y=0,5x+3 являются взаимно обратными.

Если  и  - дифференцируемые функции своих аргументов, то сложная функция  является дифференцируемой функцией и ее производная равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу и производной промежуточного аргумента  по независимой переменной:

.

Если в точке  производная , то производная обратной функции  в точке  существует и равна обратной величине производной данной функции: , или

.

  Чтобы найти производную функции  , заданной уравнением в неявном виде, нужно продифференцировать обе части этого уравнения и разрешить полученное уравнение относительно  y'.

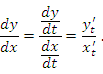
Тогда y(x)=ψ(t(x)) – сложная функция и ее производная: . Производную тоже запишем в параметрической форме:



  Пусть функция    задана параметрическими уравнениями



где  t  – параметр.  
      Тогда производная этой функции по переменной  x  равна отношению производных    и    по параметру  t:



Пример. Найти производную функции   , заданной уравнениями в параметрической форме:



      Решение. Очевидно, что



      Следовательно,

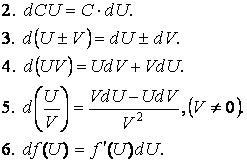


34***.*** Дать определение дифференциала первого порядка, сформулировать его свойства и геометрический смысл, записать соответствующие формулы, дать необходимые пояснения. Записать формулы использования дифференциала в приближенных вычислениях, определить условия их применения, дать необходимые пояснения. Дать определения производных и дифференциалов высших порядков. Записать соответствующие формулы, дать необходимые пояснения.

Дифференциалом первого порядка функции Называется главная, линейная относительно аргумента часть. Дифференциалом аргумента называется приращение аргумента:.

Основные свойства дифференциала:

Где .



**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ**, дифференциал функции y = f(x) в точке x0 равен приращению ординаты точки на касательной к кривой y = f(x), которое соответствует приращению Δx.

**Формулу** для приближенного вычисления с помощью дифференциала:



35***.*** Дать понятие о неопределенностях при вычислении пределов и назвать их виды. Сформулировать правило Лопиталя для вычисления пределов функций, записать соответствующую формулу, определить условия ее применения, указать, какие неопределенности можно раскрыть с помощью данного правила, привести примеры.

Выражения, значение которых не определено. Такие выражения называют **неопределенностями**.

**Основные виды** неопределенностей: ноль делить на ноль формула (0 на 0), бесконечность делить на бесконечность формула, ноль умножить на бесконечность формула, бесконечность минус бесконечность формула, единица в степени бесконечность формула, ноль в степени ноль формула, бесконечность в степени ноль формула.

Правило Лопиталя — метод нахождения пределов функций, раскрывающий неопределённости вида 0/0 и ∞/∞. Суть правила: предел отношения функций равен пределу отношения их производных.

Правило Лопиталя

1. Правила Лопиталя применимы и тогда, когда функции f(x) и g(x) не определены при x = a.

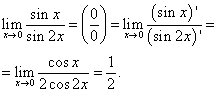
2. Если при вычисления предела отношения производных функций f(x) и g(x) снова приходим к неопределённости вида 0/0 или ∞/∞, то правила Лопиталя следует применять многократно (минимум дважды).

3. Правила Лопиталя применимы и тогда, когда аргумент функций (икс) стремится не к конечному числу a, а к бесконечности (x → ∞).

Пример 2. Вычислить предел отношения двух функций, пользуясь правилом Лопиталя:

.

Решение. Подстановка в заданную функцию значения x=0 приводит к неопределённости вида 0/0. Поэтому вычисляем производные функций в числителе и знаменателе и получаем:



36. Дать определение свойства монотонности функции. Сформулировать необходимые и достаточные условия монотонности функции на промежутке. Дать определение точки экстремума функции. Сформулировать необходимые и достаточные условия экстремума функции. Изложить правило исследования функции на промежутки монотонности и экстремумы.

Промежутки области определения, на которых функция возрастает или убывает, называются **промежутками монотонности функции**.

Необходимое условие. Пусть функция непрерывна на (a,b), и имеет в каждой точке производную f'(x). Тогда

f возрастает на (a,b) тогда и только тогда, когда 

f убывает на (a,b) тогда и только тогда, когда 

Достаточное условие. Пусть функция непрерывна на (a,b), и имеет в каждой точке производную f'(x). Тогда

если то f строго возрастает на (a,b);

если то f строго убывает на (a,b).

**Точка экстремума функции** - это точка области определения функции, в которой значение функции принимает минимальное или максимальное значение. Значения функции в этих точках называются экстремумами (минимумом и максимумом) функции.

37. Дать определение направления выпуклости кривой, сформулировать необходимые и достаточные условия выпуклости/вогнутости графика функции на промежутке. Дать определение точки перегиба графика функции. Сформулировать необходимые и достаточные условия существования точки перегиба графика функции. Изложить правило исследования функции на промежутки выпуклости и точки перегиба.

Промежутки, в которых график функции обращен выпуклостью вверх или вниз, называются промежутками **выпуклости графика функции**.

Выпуклость вниз или вверх кривой, являющейся графиком функции y=f(x), характеризуется знаком ее второй производной: если в некотором промежутке f’’(x) > 0, то кривая выпукла вниз на этом промежутке; если же f’’(x) < 0, то кривая выпукла вверх на этом промежутке.

Точка графика функции y=f(x), разделяющая промежутки выпуклости противоположных направлений этого графика, называется **точкой перегиба**.

Теорема 1 (необходимое условие существования точки перегиба). Если функция у = f(x) имеет непре­рывные производные до второго порядка включительно на интервале ]а; b[ и точка (х0; f (х0)), где хо ]а;b[, является точкой перегиба графика функции f(x), то

Теорема 2 (достаточное условие). Если функция y=.f(x), x]a; b[, дважды дифференцируема на интервале ]а; b[ и при переходе через хо]а; b[ вторая производная f"(x) меняет знак, то точки кривой с абсциссой х — х0 является точкой перегиба.

**Правило**. График функции y=f(x), дифференцируемой на интервале (a;b), является на этом интервале выпуклым, если график этой функции в пределах интервала (a;b) лежит не выше любой своей касательной.

**Правило** нахождения точек перегиба графика функции y = f(x)

1. Найти вторую производную f’’(x).
2. Найти критические точки II рода функции y=f(x), т.е. точки, в которой f’’(x) обращается в нуль или терпит разрыв.
3. Исследовать знак второй производной f’’(x) в промежутка, на которые найденные критические точки делят область определения функции f(x). Если при этом критическая точка x0 разделяет промежутки выпуклости противоположных направлений, то x0 является абсциссой точки перегиба графика функции.
4. Вычислить значения функции в точках перегиба.

38. Дайте определение функции нескольких переменных, ее области определения, графика. Приведите примеры. Дайте определение частных приращений и частных производных функции нескольких переменных и запишите соответствующие формулы. Поясните, как вычисляются частные производные функции многих переменных.

39. Дайте определение полного приращения функции нескольких переменных. Сформулируйте определение полного дифференциала функции 2-х переменных и запишите соответствующую формулу. Сформулируйте понятия частных производных и дифференциалов высших порядков функции нескольких переменных, запишите необходимые формулы, дайте соответствующие пояснения.

40. Дайте определение первообразной и неопределенного интеграла, запишите соответствующие формулы. Сформулируйте основные свойства неопределенного интеграла и запишите соответствующие формулы. Сформулируйте сущность метода замены переменной в неопределенном интеграле, запишите соответствующую формулу. Разъясните последовательность подстановки. Поясните способ интегрирования поднесением функции под знак дифференциала. Сформулируйте сущность метода интегрирования по частям неопределенного интеграла. Выведите формулу интегрирования по частям неопределенного интеграла. Разъясните последовательность действий, которые необходимы для применения метода.

41. Дайте определение целой и дробно-рациональной функций. Сфор-мулируйте правило интегрирования целой рациональной функции и неправильной рациональной дроби. Дать определение правильной рациональной дроби и записать виды простых дробей. Изложить правило интегрирования правильной рациональной дроби. Раскрыть сущность разложения рациональной функции на сумму простых дробей.

42. Записать интегралы от простых дробей и разъяснить способы их вычисления. Запишите представление рациональной дроби в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами. Изложите методы нахождения коэффициентов разложения рациональной дроби на простейшие (метод неопределенных коэффициентов, метод частных значений).

43. Запишите основные типы интегралов от тригонометрических функций. Запишите и разъясните основные формулы и подстановки, применяемые при интегрировании тригонометрических функций.

44. Записать формулы для интегрирования иррациональных выражений, содержащих квадратный трехчлен. Вывести формулу выделения полного квадрата из квадратного трехчлена. Дайте понятие о рационализация иррациональных функций с помощью подходящих подстановок. Запишите и объясните подстановки, применяемые при интегрировании дробно-линейных иррациональностей.

45. Сформулируйте задачу о площади криволинейной трапеции. Определите понятие определенного интеграла через предел интегральной суммы функции. Дайте определение определенного интеграла и изложите его общие свойства, запишите соответствующие формулы. Сформулируйте теоремы о необходимых и достаточных условиях интегрируемости функций. Сформулируйте теорему и запишите формулу Ньютона-Лейбница. Объясните алгоритм вычисления по ней определенного интеграла.

46. Определите суть метода подстановки и его особенности в определенном интеграле. Сформулируйте теорему о замене переменной в определенном интеграле. Изложите последовательность подстановки. Разъяснить сущность метода интегрирования по частям в опреде-ленном интеграле. Записать формулу интегрирования по частям определенного интеграла.

47. Определите геометрический смысл определенного интеграла. Поясните, как вычисляется площадь плоской фигуры в прямоугольной декартовой системе координат. Приведите примеры. Запишите соответствующие формулы.

48. Для каких вычислений применяется определенный интеграл в геометрии? Запишите и поясните формулы для вычисления объема тела по известным площадям его поперечных сечений и для объема тела вращения.

49. Определите понятие несобственного интеграла I рода, сформулируйте его свойства. Запишите формулы Ньютона-Лейбница и объясните процесс вычисления по ней несобственных интегралов. Поясните применение метода подстановки и формулы интегрирования по частям в несобственном интеграле.

50. Дать определение дифференциального уравнения первого порядка, его общего и частного решения. Сформулировать задачу Коши для ДУ-1. Записать дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Объяснить способ его решения.

51. Определите понятие однородной функции порядка n. Запишите однородное дифференциальное уравнение первого порядка и объясните способ его решения.

52. Запишите линейное однородное и неоднородное дифференциальное уравнения первого порядка, дайте необходимые пояснения. Изложите алгоритм решения линейного ДУ-1 по методу Бернулли.

53. Перечислите виды интегрируемых ДУ высших порядков. Сформулируйте задачу Коши для ДУ-2. Изложите способ решения простейших дифференциальных уравнений высших порядков методом понижения порядка дифференциального уравнения.

54. Дать определение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Изложить правило составления характеристического уравнения. Объяснить способ записи его решения в зависимости от корней характеристического уравнения.

55. Дать определение числового ряда. Определить понятия сходимости и суммы ряда. Изложить основные свойства рядов. Определить понятие остатка ряда и изложить его свойства. Сформулировать

необходимое условие сходимости числового ряда и его следствие.

56. Сформулировать достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов – признаки сравнения, Д′Аламбера и Коши.

57. Дать определение абсолютной и условной сходимости знакопеременных рядов. Сформулировать достаточный признак абсолютной сходимости знакопеременного ряда. Дать определение знакочередующегося ряда. Сформулировать условия сходимости по признаку Лейбница, приведите пример ряда Лейбница. Оценка остатка ряда Лейбница.

58. Дать определение функционального ряда, его суммы, остатка и области сходимости. Сформулировать признаки сходимости Д′Аламбера и Коши для функционального ряда.

59. Дать определение степенного ряда, его суммы, остатка и области сходимости. Изложить свойства степенных рядов. Сформулировать теорему Абеля. Дать определение радиуса и интервала сходимости степенного ряда. Записать формулы для вычисления радиуса сходимости степенного ряда и объяснить их.

60. Записать формулы Тейлора и Маклорена и разъяснить их. Сформулировать условия разложимости функции в ряд Тейлора. Привести пример разложения функции в степенной ряд.

Преподаватели \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ О.В.Гальцова

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ А.Н.Василевская

Рассмотрены на заседании методической (предметной/цикловой) комиссии №8 естественно-математического цикла

Протокол №\_\_\_ от «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2022

Председатель ЦК \_\_\_\_\_\_\_\_\_Д.Ф. Клименко.